سوال ۱

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

تابع در $x = ۲$ پیوسته است و $g(۲) = ۰$ است. داریم:

$$g'(۲) = \lim_{x\to ۲} \frac{g(x)-g(۲)}{x-۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{\frac{۴-x^۲}{f(x)}}{x-۲}$$

$$= \lim_{x\to ۲} \frac{-(x-۲)(x+۲)}{(x-۲)f(x)} = \lim_{x\to ۲} \frac{-(x+۲)}{f(x)} = -\frac{۴}{۱} = -۴$$

سوال ۲

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$f'_+(۱) = \lim_{x\to ۱^+} \frac{\sqrt{x^۲-\sqrt{۲x^۲-۱}}-۰}{x-۱} \xrightarrow[\text{مزدوجصورت}]{\text{ب صورت و مخرج در}}$$

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{\sqrt{x^۲-\sqrt{۲x^۲-۱}}}{x-۱} \times \frac{\sqrt{x^۲+\sqrt{۲x^۲-۱}}}{\sqrt{x^۲+\sqrt{۲x^۲-۱}}} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{\sqrt{x^۴-۲x^۲+۱}}{(x-۱)\times\sqrt{۲}}$$

$$= \lim_{x\to ۱^+} \frac{\sqrt{(x^۲-۱)^۲}}{(x-۱)(\sqrt{۲})} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{|x^۲-۱|}{(x-۱)\times\sqrt{۲}}$$

$$= \lim_{x\to ۱^+} \frac{(x-۱)(x+۱)}{(x-۱)\sqrt{۲}} = \frac{۲}{\sqrt{۲}} = \sqrt{۲}$$

دقت کنید که در همسایگی راست $x = ۱$، عبارت $x^۲ - ۱$ مقداری مثبت دارد.

سوال ۳

پاسخ: گزینه ۲

تابع y در $x = ۰$ پیوسته است، بنابراین تعریف مشتق را در $x = ۰$ می‌نویسیم:

$$g'(۰) = \lim_{x\to ۰} \frac{xf(x)-۰}{x-۰} = \lim_{x\to ۰} f(x) = ۱$$

سوال ۴

پاسخ: گزینه ۳

توجه کنید که در یک همسایگی نقطه $x = \frac{۳}{۲}$ داریم: $[۳x] = ۴$. بنابراین در این همسایگی تابع f برابر است با:

$f(x) = ۴mx - ۲$

شیب خط $y = ۴mx - ۲$ برابر $۴m$ است، پس $f'(\frac{۳}{۲})$ برابر $۴m$ است. بنابراین داریم:

$۲m + ۱ = ۴m \Rightarrow m = \frac{۱}{۲}$

سوال ۵

پاسخ: گزینه ۴

شیب خط مماس بر نمودار تابع f در نقطه $x = ۰$ برابر $f'(۰)$ است. پس داریم:

$f'(۰) = \lim_{x\to ۰} \frac{f(x)-f(۰)}{x-۰} = \lim_{x\to ۰} \frac{x\sqrt{x+۴}-۰}{x}$

$\lim_{x\to ۰} \sqrt{x+۴} = ۲$

از طرف دیگر خط مماس از نقطه $(۰,۰)$ عبور می‌کند، پس معادله آن به صورت $y = ۲x$ است و این خط از نقطه $(-\frac{۱}{۲},-۱)$ نیز می‌گذرد.

سوال ۶

پاسخ: گزینه ۲

$\lim_{x\to ۳} \frac{x-۳}{f(x)} = \frac{۱}{\lim_{x\to ۳} \frac{f(x)}{x-۳}} = \frac{۱}{f'(۳)} = ۳ \Rightarrow f'(۳) = \frac{۱}{۳}$

یعنی شیب خط $d_۲$ برابر $\frac{۱}{۳}$ است. حال چون خط $d_۱$ بر خط $d_۲$ عمود است، شیب $d_۱$ یا به عبارت دیگر، مشتق تابع f در $x = ۲$ برابر -۳ است.

$f'(۲) = -۳$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)}{x^۳ - ۸} = \lim_{x\to ۲} \frac{f(x)}{(x^۲ + ۲x + ۴)(x - ۲)}$$
$$= \lim_{x\to ۲} \frac{۱}{x^۲ + ۲x + ۴} \times \lim \frac{f(x)}{x - ۲}$$
$$= \frac{۱}{۱۲} f'(۲) = -\frac{۱}{۴}$$

سوال ۷

پاسخ: گزینه ۱

$\lim_{x\to ۱} \frac{f^۳(x)-۴f(x)}{x-۱} = \lim_{x\to ۱} \frac{f(x)(f(x)+۲)(f(x)-۲)}{x-۱}$

$$= \lim_{x\to ۱} (f(x)(f(x) + ۲)) \times \lim_{x\to ۱} \frac{f(x) - ۲}{x - ۱} = ۲ \times ۴ \times f'(۱)$$
$$= ۸ \times ۳ = ۲۴$$

سوال ۸

پاسخ: گزینه ۲

$$\lim_{h\to ۰} \frac{f(۲+h)-۴}{۲h} = \frac{۱}{۲}\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h} = \frac{۱}{۲}f'(۲) = -۳$$

$$\Rightarrow f'(۲) = -۶$$

چون خط d در نقطه $x = ۲$ بر نمودار توابع f و g مماس است، $g'(۲) = f'(۲) = -۶$ است. بنابراین داریم:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{g(۲-h)-۴}{۳h} = -\frac{۱}{۳}\lim_{h\to ۰}\frac{g(۲-h)-g(۲)}{-h}$$

$$= -\frac{۱}{۳}g'(۲) = \left(-\frac{۱}{۳}\right)(-۶) = ۲$$

سوال ۹

پاسخ: گزینه ۳

$$\lim_{h\to ۰^-} \frac{f(۲)-f(۲+h)}{h} = -f'_-(۲)$$

$$-f'_-(۲) = -\lim_{x\to ۲^-}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲} = -\lim_{x\to ۲^-}\frac{\frac{x^۲-۴}{\cos \pi x}[x-۳]-۰}{x-۲}$$

$$= -\lim_{x\to ۲^-}\frac{\frac{(x-۲)(x+۲)}{\cos \pi x}[۲^- -۳]}{x-۲} = -\left(\frac{۴}{\cos ۲\pi}(-۲)\right) = ۸$$

سوال ۱۰

پاسخ: گزینه ۴

معادله خط d : $y - ۰ = -\frac{۱}{۲}(x - ۰) \Rightarrow y = -\frac{۱}{۲}x$

طول نقطه B: $-۳ = -\frac{۱}{۲}x \Rightarrow x = ۶ \Rightarrow B = (۶, -۳)$

$$m_l = \frac{۰-(-۳)}{k-۶} = f'(k) \Rightarrow \frac{۳}{k-۶} = ۲ \Rightarrow ۲k - ۱۲ = ۳ \Rightarrow k = \frac{۱۵}{۲}$$

$$\Rightarrow S_{AOB} = \frac{|x_A|\times|y_B|}{۲} = \frac{\frac{۱۵}{۲}\times(۳)}{۲} = \frac{۴۵}{۴}$$